CHAPITRE 4

CAS ELEMENTAIRES DE PORTANCE

Les différents phénomènes de portance en lubrification fluide, peuvent s'étudier séparément dans le cas des fluides incompressibles et de viscosité constante sur des exemples très simples [1, 2]. Le cas de deux surfaces non parallèles formant un coin d'huile sera étudié en détail au chapitre 5, car il est représentatif de la butée hydrodynamique.

1 – CAS DE DEUX SURFACES PARALLELES : PORTANCE HYDROSTATIQUE

Soit l'écoulement entre deux plaques planes parallèles, de largeur infinie selon Oz. La plaque supérieure de longueur B est fixe ; la plaque inférieure est animée d'un mouvement de translation uniforme de vitesse $U_1 = U$ (fig. 1). Dans ces conditions et compte tenu des relations établies précédemment, la vitesse du fluide s'écrit :

$$u = \frac{1}{2\mu}\frac{dp}{dx}y(y-h) + \frac{h-y}{h}U$$

et l'équation de Reynolds

$$\frac{d^2p}{dx^2} = 0$$

car la vitesse U et l'épaisseur h sont constantes. Ainsi : $\frac{dp}{dx} = Cste$.

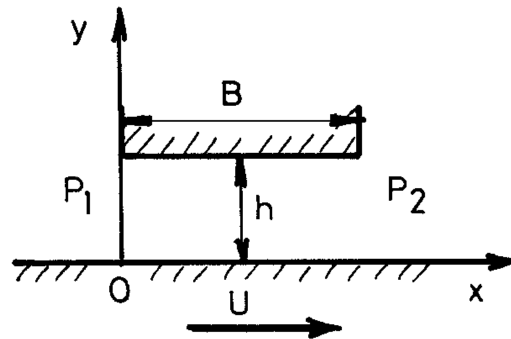


Fig. 1 : Faces parallèles

Deux cas peuvent se présenter :

a) la pression est identique à l'entrée et à la sortie. Dans ce cas, $dp/dx = 0$; il n'y a pas de portance dans le contact et la répartition de vitesse suivant l'épaisseur du film est linéaire. C'est l'écoulement de Couette.
b) la pression est différente à l'entrée et à la sortie. Dans ce cas :

$$\frac{dp}{dx} = \frac{P_2 - P_1}{L}$$

où P_1 et P_2 représentent respectivement la pression à l'entrée et à la sortie du contact. Le champ de vitesse dans le film est fonction des pressions imposées aux extrémités du contact. Ainsi, la vitesse du fluide est généralement due à 2 effets différents :

- l'écoulement de Couette, c'est le terme $\frac{h-y}{h}U$
- l'écoulement de Poiseuille, c'est le terme $\frac{1}{2\mu}\frac{dp}{dx}y(y-h)$

Dans ce cas il y a portance, mais il faut remarquer que celle-ci est indépendante de la vitesse et de l'épaisseur du film : c'est une portance hydrostatique. Ces différents types d'écoulements ont été présentés au chapitre 3.

2 – CAS DE DEUX SURFACES PARALLELES : EFFET D'ETIREMENT

Soit l'écoulement entre deux plaques planes parallèles de largeur infinie selon Oz. La plaque supérieure de longueur B est fixe. La plaque inférieure se déplace en s'étirant avec une vitesse de translation $U_1 = U(x)$, (fig. 2). Ceci est une schématisation élémentaire du formage plasto-hydrodynamique des métaux.

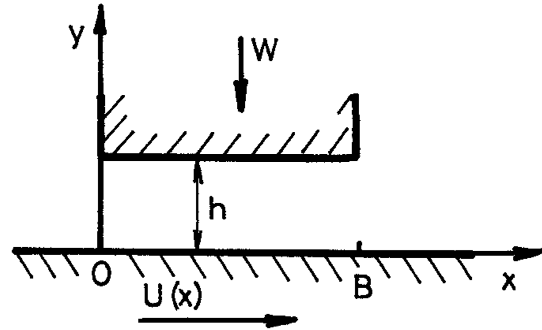


Fig. 2 : Plaques parallèles : effet d'étirement

L'équation de Reynolds s'écrit :

$$\frac{d^2 p}{dx^2} = \frac{6\mu}{h^2} \frac{dU}{dx}$$

soit

$$\frac{dp}{dx} = \frac{6\mu U}{h^2} + C_1$$

et

$$p = \frac{6\mu}{h^2} \int U dx + C_1 x + C_2$$

Les constantes C_1 et C_2 sont déterminées par les conditions aux limites sur la pression.

Dans le cas particulier où $U = Ax + D$ et compte tenu des conditions aux limites $p = 0$ pour $x = 0$ et $x = B$, la pression s'écrit :

$$p = -\frac{3\mu A}{h^2} x (B - x)$$

et la charge pour une largeur L suivant Oz :

$$W = -L \frac{\mu A B^3}{2 h^2}$$

Le signe négatif de la charge rend compte de l'effet de pompage du fluide qui se produit lorsqu'on impose à la distance entre les deux plaques de rester constante et égale à h.

3 – CAS DE DEUX SURFACES PARALLELES : EFFET D'ECRASEMENT

Soit l'écoulement entre deux plaques planes parallèles, de largeur infinie suivant Oz. La plaque inférieure est immobile et la plaque supérieure, de longueur B est animée d'une vitesse $V_2 = V(t)$ suivant $\overrightarrow{Oy}$, (fig. 3), les deux plaques restent constamment parallèles.

L'équation de Reynolds s'écrit :

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} = \frac{12\,\mu V}{h^3}$$

soit

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{12\,\mu V}{h^3} x + C_1$$

et

$$p = \frac{6\,\mu\,V}{h^3} x^2 + C_1 x + C_2$$

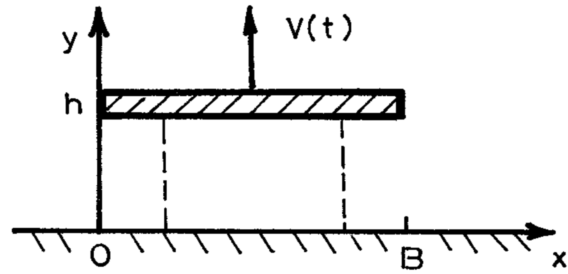


Fig. 3 : Plaques parallèles : effet d'écrasement

Les fonctions $C_1(t)$ et $C_2(t)$ sont déterminées par les conditions aux limites sur la pression.

La répartition de pression compte tenu des conditions aux limites $p = 0$ pour $x = 0$ et pour $x = B$, s'écrit :

$$p = \frac{6\mu\,V}{h^3}(x^2 - B\,x)$$

La portance hydrodynamique W résultant de cet effet d'écrasement s'écrit :

$$W = -\frac{\mu\,V B^3 L}{h^3} \qquad \text{avec} \qquad V = \frac{dh}{dt}$$

Dans le cas d'un mouvement d'approche de la plaque supérieure avec une vitesse de module constant $|V|$ suivant $\overrightarrow{Oy}$, la vitesse est négative et l'épaisseur du film tend vers zéro. Pour $h > 0$, la portance hydrodynamique due à cet effet d'écrasement est une fonction du temps, elle s'écrit :

$$W = \frac{\mu |V| B^3 L}{h^3}$$

Dans le cas d'un mouvement oscillatoire de la plaque supérieure autour d'une valeur moyenne correspondant à une épaisseur de film h_0, l'équation de l'épaisseur du film peut se mettre sur la forme $h(t) = h_0 + h_1 \sin \omega t$ où h_1 est l'amplitude telle que $h_1 < h_0$ et ω la pulsation. La vitesse V devient $V = h_1\,\omega \cos \omega t$ et la portance hydrodynamique, due à cet effet d'écrasement, s'écrit :

$$W = \frac{L B^3\,\mu\,h_1\,\omega \cos \omega t}{(h_0 + h_1 \sin \omega t)^3}$$

soit en posant

$$\alpha = \frac{h_1}{h_0} \quad \text{avec} \quad 0 < \alpha < 1$$

$$W = \frac{\mu\,\omega\,\alpha\,B^3 L}{h_0^2} \cdot \frac{\cos \omega t}{(1 + \alpha \sin \omega t)^3}$$

Remarquons que dans ce dernier cas, la pression est positive ou négative. L'apparition de pressions négatives peut entraîner de la cavitation dans le fluide. Par ailleurs il existe un déphasage entre les extrêma d'épaisseur du film et les extrêma de charge.

4 – CAS D'UNE DISCONTINUITE

Soit un patin échelon, dit patin de Rayleigh (Fig. 4), de largeur infinie selon Oz. Il est constitué de deux régions : une région d'entrée où l'épaisseur du film est constante et égale à h_1, une région de sortie où l'épaisseur est également constante et égale à h_2 ($h_2 < h_1$). Ces deux régions sont ainsi séparées par une discontinuité dans l'épaisseur du film, située au point $x = B_0$. Pour étudier ce problème, il faut isoler la discontinuité et résoudre l'équation de Reynolds séparément dans les régions d'entrée et de sortie.

Dans la région d'entrée définie par $O \leq x < B_0$ l'équation de Reynolds s'écrit :

$$\frac{d^2 p}{dx^2} = 0$$

soit

$$p = C_1 x + C_2$$

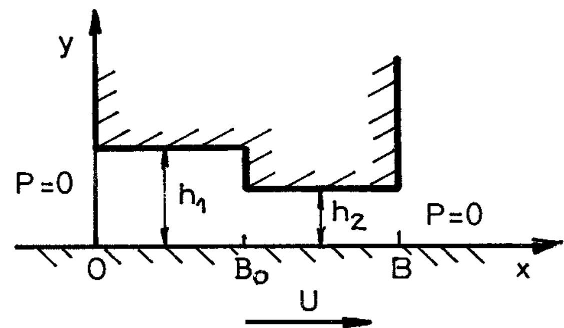


Fig.4 : Patin de Rayleigh

C_1 et C_2 sont calculées à partir des conditions aux limites qui s'écrivent :

$$\begin{cases} p = 0 & \text{pour} \quad x = 0 \\ p = P_m & \text{pour} \quad x = B \end{cases}$$

où P_m est la pression inconnue qui existe au niveau de la discontinuité.

Il vient ainsi :

$$p = \frac{P_m}{B_0} x$$

De même dans la zone de sortie définie par $B_0 < x \leq B$, l'équation de Reynolds s'écrit :

$$\frac{d^2 p}{dx^2} = 0$$

soit

$$p = C_3 x + C_4$$

Les conditions aux limites

$$\begin{cases} p = p_m & \text{pour} \quad x = B_0 \\ p = 0 & \text{pour} \quad x = B \end{cases}$$

permettent de calculer C_3 et C_4. Il vient :

$$p = \frac{P_m}{B - B_0}(B - x)$$

Ainsi, la variation de pression est linéaire dans le contact (fig. 5). La pression inconnue P_m est calculée en écrivant l'égalité des débits à l'entrée et à la sortie.

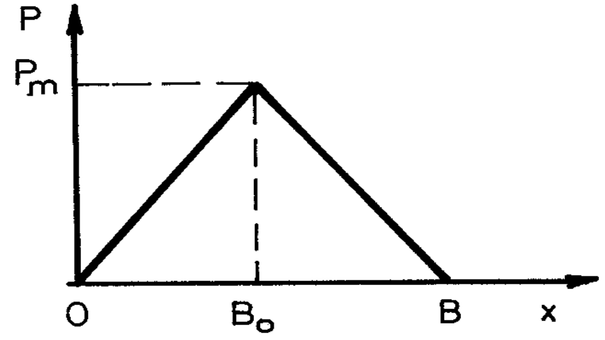


Fig. 5 – Répartition de pression

Le débit pour une largeur L s'écrit à l'entrée ou à la sortie :

$$Q_i = L\int_0^h u_i \, dy$$

avec

$$u_i = \frac{1}{2\mu}\frac{dp_i}{dx} y(y - h_i) + \frac{h_i - y}{h_i} U$$

où i prend la valeur 1 à l'entrée et 2 à la sortie. Il vient ainsi :

$$Q_i = -\frac{L h_i^3}{12\mu}\frac{dp_i}{dx} + \frac{L U h_i}{2}$$

avec :

$$\frac{dp_1}{dx} = \frac{P_m}{B_0} \qquad \text{et} \qquad \frac{dp_2}{dx} = \frac{-P_m}{B - B_0}$$

L'égalité des débits Q_1 et Q_2 permet d'écrire :

$$P_m = 6\mu U \frac{h_1 - h_2}{\dfrac{h_1^3}{B_0} + \dfrac{h_2^3}{B - B_0}}$$

soit encore

$$P_m = \frac{6\mu U B}{h_2^2}\frac{s(1 - s)(a - 1)}{a^3(1 - s) + s}$$

en posant $a = h_1 / h_2 \qquad s = B_0 / B$

pour une largeur L, la charge s'écrit :

$$W = L\frac{B P_m}{2}$$

Les valeurs de a et s qui rendent la charge maximale sont :

$$a = 1{,}866 \qquad ; \qquad s = 0{,}718$$

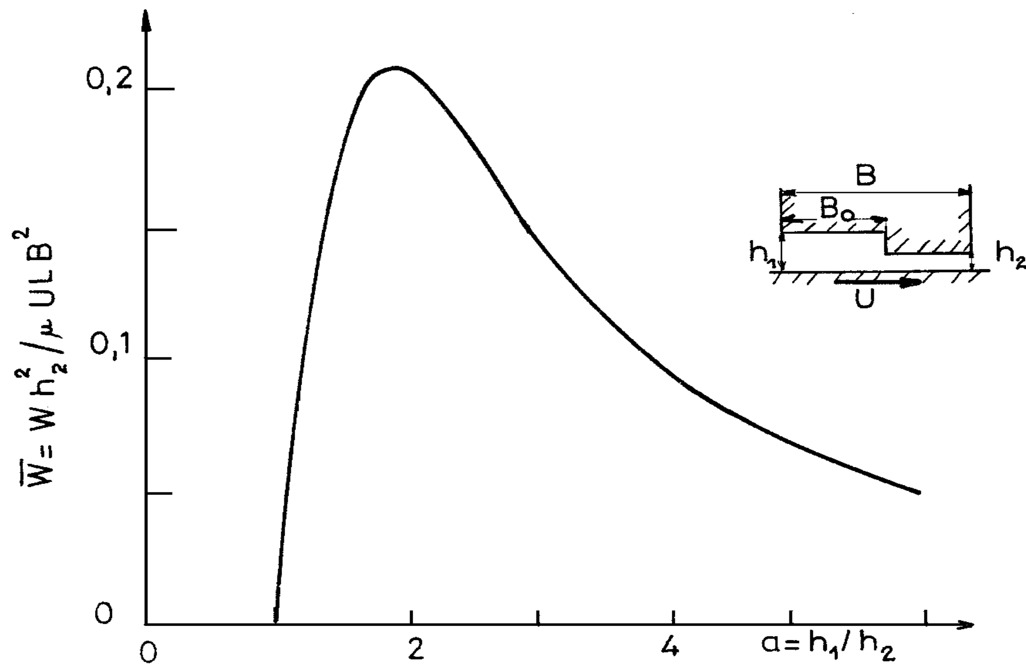


Fig. 6 : Variation de la charge sans dimension $\overline{W}$ en fonction du rapport h_1/h_2.

La figure 6 donne les variations de la charge sans dimension $\overline{W} = h_2^2 \, W / \mu \, ULB^2$ en fonction de a pour s = 0,718. On peut démontrer que pour un encombrement égal et pour les conditions optimales, la charge portante de ce système est la plus élevée possible. Cependant, les effets d'inertie dans le fluide, lorsqu'ils existent, ont tendance à diminuer la portance du patin échelon.

5 – APPLICATION

5.1 – PATIN A ECHELON

On considère un patin à échelon, ou patin de Rayleigh, semblable à celui schématisé sur la figure 4. La forme du contact et les conditions de fonctionnement sont telles que :

Longueur totale : B = 0,5 m
Longueur de la zone d'entrée : $B_0 = 0{,}36$ m
Largeur L = 1 m
Epaisseurs du film : $h_1 = 0{,}2$ mm ; $h_2 = 0{,}1$ mm
Vitesse de translation : $U = 6 \, m/s$
Viscosité dynamique du lubrifiant : $\mu = 0{,}01 \, Pa.s$

Si on néglige l'écoulement axial, les relations présentées dans le paragraphe 4 permettent de calculer les caractéristiques de fonctionnement :

La pression maximale : $P_m = 1{,}226 \; 10^6$ Pa
La portance : $W = 306 \; 10^3$ N
Le débit : $Q = 3{,}7 \, 10^{-4} \; m^3/s$.

La force de frottement est obtenue par intégration du taux de cisaillement :

$$\tau_{xy} = \mu \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{1}{2}(2y - h)\frac{dp}{dx} - \mu \frac{U}{h}$$

sur la surface inférieure : y = 0. On obtient :

$$F = -\int_0^L \int_0^B (\tau_{xy})_{y=0}\, dx\, dz = L\left\{\frac{P_m}{2}(h_1 - h_2) + \mu U\left(\frac{B_0}{h_1} + \frac{B - B_0}{h_2}\right)\right\}$$

soit : $F = 61{,}3 + 192 = 253{,}3\,N$

La puissance dissipée par cisaillement est :

$$\mathcal{P} = F.U = 1520\ W$$

et le coefficient de frottement :

$$f = \frac{F}{W} \approx 8{,}3\ 10^{-4}$$

5.2 – POMPE A ACTION VISQUEUSE

On considère le patin à échelon définit précédemment en 5.1 mais on pratique au niveau de l'échelon une rainure transversale de façon à dériver une partie de l'écoulement (fig. 7). On crée ainsi une pompe capable de fournir un débit Q_0 sous la pression P_0, si P_0 désigne la pression qui règne au niveau de la discontinuité.

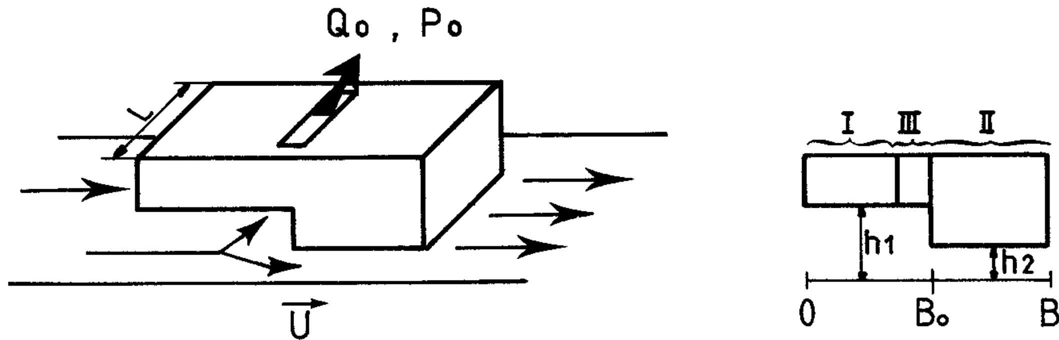


Fig. 7 : Pompe à action visqueuse

Calculons les caractéristiques (P_0, Q_0) de cette pompe en négligeant l'écoulement axial. On distingue 3 régions :

- la région d'entrée I où l'épaisseur du film est h_1. Le débit est donné par :

$$Q_I = L\left[-\frac{h_1^3}{12\mu}\frac{P_0}{B_0} + U\frac{h_1}{2}\right]$$

et la force de frottement :

$$F_I = L\left[\frac{h_1}{2}P_0 + \mu U \frac{B_0}{h_1}\right]$$

- la région centrale III où la pression est constante et égale à P_0.

- la région de sortie II où l'épaisseur du film est h_2. Le débit est donné par :

$$Q_{II} = L\left[\frac{h_2^3}{12\mu}\frac{P_0}{(B-B_0)} + U\frac{h_2}{2}\right]$$

et la force de frottement :

$$F_{II} = L\left[-\frac{h_2}{2}P_0 + \mu U \frac{(B-B_0)}{h_2}\right]$$

La conservation de la masse implique :

$$Q_I = Q_0 + Q_{II}$$

d'où :

$$Q_0 = L\left\{-\frac{P_0}{12\mu}\left[\frac{h_1^3}{B_0} + \frac{h_2^3}{B-B_0}\right] + \frac{U}{2}\left[h_1 - h_2\right]\right\}$$

On remarque que le débit Q_0 est une fonction linéaire décroissante de la pression P_0. Lorsque le débit Q_0 est nul, la pression P_0 est alors identique à la pression P_m calculée précédemment en 5.1. Lorsque la pression P_0 tend vers zéro le débit Q_0 tend vers la valeur limite Q_m :

$$Q_m = L\frac{U}{2}(h_1 - h_2)$$

Le point de fonctionnement de la pompe (P_0, Q_0) dépend des caractéristiques hydrauliques du mécanisme situé en aval de la rainure. Une telle pompe ne fournira jamais un débit important car la portance de l'écoulement, conditionnée par la pression P_0, serait alors très réduite.

Considérons les mêmes données qu'en 5.1 et recherchons les caractéristiques de fonctionnement si le débit dérivé Q_0 est de $5 \cdot 10^{-5}\ m^3/s.\ (3\ell/mn)$.

La pression : $P_0 \approx 1{,}02.10^6$ Pa
la portance : $W \approx 260.10^3$ N
La puissance : $\mathcal{P} \approx 1460$ W

On note que la dérivation de fluide entraîne une perte de portance. Le « rendement » de cette pompe est :

$$\eta = \frac{P_0 Q_0}{P} = 0{,}035$$

C'est un rendement très faible, mais rappelons que l'objectif principal était la portance. Ce concept de pompe à action visqueuse est quelquefois utilisé pour créer une autocirculation du lubrifiant de la butée vers le circuit réfrigérant [3].

Le rendement peut être amélioré si la portance n'est plus le facteur prépondérant. Le tableau 1 donne les valeurs adimensionnées s et a qui conduisent, pour une pression P_0 donnée, à un rendement maximal. Ces valeurs sont obtenue pour les données suivantes :

$$B = 0{,}5\,m \;;\; L = 1\,m \;;\; U = 6\,m/s \;;\; h_2 = 10^{-4}\,m \;;\; \mu = 0{,}01\,Pa.s \quad \text{et} \quad s = \frac{B_0}{B} \;;\; a = \frac{h_1}{h_2}$$

Le rendement croit lorsque la pression P_0 diminue, l'échelon est alors important et la région de faible jeu (h_2) réduite.

Tableau 1 – Evolution du rendement maximal

P_0 (M.Pa)	η_m	A	s	Q_0 (ℓ/s)	Q_I (ℓ/s)	Q_{II} (ℓ/s)
0,3	0,18	4,3	0,94	0,484	0,867	0,384
0,5	0,14	3,2	0,89	0,277	0,653	0,376
1	0,04	2,1	0,77	0,057	4,29	0,372

5.3 – JOINT ANNULAIRE A FUITE

Un arbre de rayon : $R_a = 20$ mm, animé d'une vitesse de rotation de 3000 tr/mn traverse un carter d'épaisseur : L = 10 mm et d'alésage de rayon : $R_c = 20{,}05$ mm. A l'intérieur du carter se trouve de l'eau à 20°C et à la pression : $P_i = 1$ MPa par rapport à la pression extérieure $(P_e = 0)$. On suppose que les axes de l'arbre et de l'alésage sont confondus et que l'écoulement est isotherme. Le mécanisme est schématisé sur la figure 7.

On souhaite connaître le débit de fuite, le couple de frottement et la puissance dissipée. Pour l'eau, on retiendra une viscosité dynamique : $\mu = 10^{-3}$ Pa.s et une masse volumique : $\rho = 10^3\ kg/m^3$.

Le jeu radial $C = R_c - R_a = 0{,}05$ mm étant très petit devant les rayons ($C/R_a \approx 0{,}0025$) ; on peut négliger la courbure du film et développer les surfaces. Le problème se ramène à l'étude de l'écoulement entre deux surfaces planes parallèles distantes de C (fig. 9). Si la surface inférieure correspond à l'arbre, celle-ci est animée d'un mouvement de translation colinéaire à l'axe x, de vitesse $U = R_a\,\omega = 6{,}28\ m/s$.

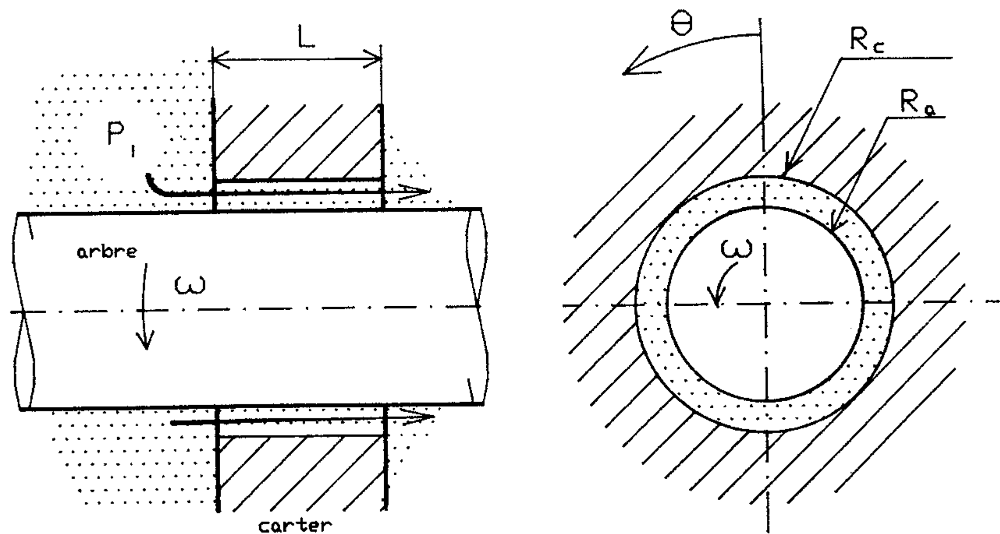


Fig. 8 : Schématisation d'un joint annulaire

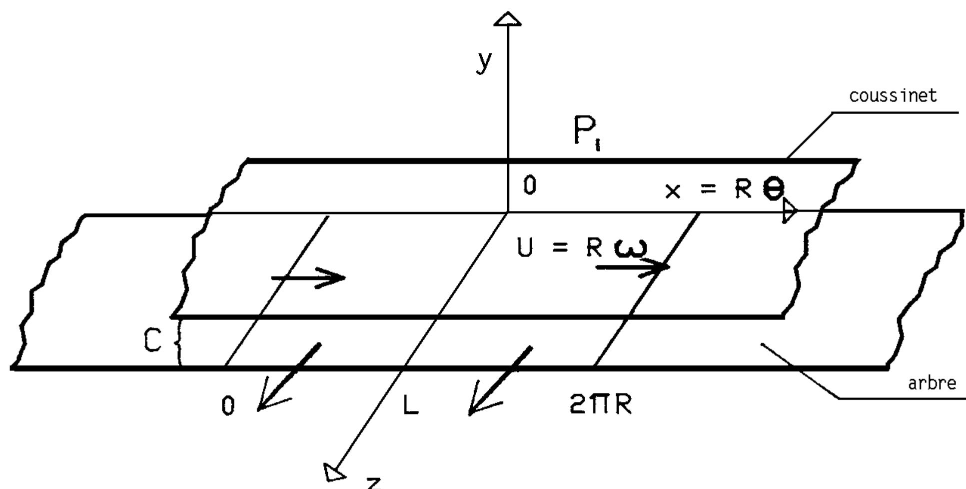


Fig. 9 : Joint développé

L'écoulement étant axisymétrique, les paramètres seront indépendants de la variable x (ou θ). Dans ces conditions l'équation de Reynolds se réduit à :

$$\frac{d^2 p}{dz^2} = 0$$

Le champ des vitesses s'écrit :

$$\begin{cases} u = \dfrac{C - y}{C} R_a \, \omega \\ w = \dfrac{1}{2\mu} \dfrac{dp}{dz} y \; (y - C) \end{cases}$$

et la contrainte de cisaillement τ_{xy} à la surface de l'arbre :

$$(\tau_{xy})_{y=0} = \mu \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_{y=0} = -\mu \frac{R_a \omega}{C}$$

Compte tenu des conditions aux limites sur la pression :

$$\begin{cases} p(z=0) = P_i \\ p(z=L) = 0 \end{cases}$$

il vient :

$$p(z) = P_i \left(1 - \frac{z}{L}\right)$$

Le débit de fuite axial est donné par :

$$Q_a = \int_0^C \int_0^{2\pi} w(z=L) R \, d\theta \, dy$$

soit :

$$Q_a = \frac{\pi R C^3 \; P_i}{6 \, \mu L} \approx 1{,}31 \quad 10^{-4} \;\; m^3/s$$

Le couple de frottement est :

$$\mathcal{C}_a = -\int_0^L \int_0^{2\pi} R_a \; \tau_{xy}(y=0) R_a \, d\theta \, dr$$

soit :

$$\mathcal{C}_a = \frac{2\pi\mu \; R_a^3 L \; \omega}{C} \approx 3{,}16 \;\; 10^{-3} \;\; N.m.$$

d'où la puissance dissipée par cisaillement :

$$P = \mathcal{C}_a \, \omega \approx 1 \; W$$

Remarques :

a) La configuration étudiée est identique à celle d'un palier lisse centré. Dans le chapitre 7, nous verrons que la position centrée est une position d'équilibre souvent instable.

b) L'effet d'accélération du fluide à l'entrée du joint est négligé. Cet effet, qui se traduit par une chute brusque de pression à l'entrée du joint, est appelé effet Lomakin [4]. Il joue un rôle important sur le comportement dynamique de l'arbre passant à travers le joint.

c) Les calculs précédents ne sont valables que si le régime d'écoulement est laminaire. Il faut donc s'assurer que les nombres de Reynolds caractéristiques de l'écoulement sont nettement inférieurs à 2000 :

- nombre de Reynolds de Couette $\Re_c$ relatif à la rotation :

$$\Re_c = \frac{\rho R_a \omega C}{\mu} \approx 314$$

- nombre de Reynolds axial moyen $\Re_a$ engendré par le gradient de pression :

$$\Re_a = \frac{\rho w_m C}{\mu} = \frac{\rho Q_a}{2\pi \mu R} \approx 1043$$

Dans les joints la turbulence et souvent due à l'écoulement axial engendré par le gradient de pression ; cet aspect est développé dans le chapitre 8.

BIBLIOGRAPHIE

[1] FRENE J. "Paliers hydrodynamiques" Techniques de l'Ingénieur B 671-1.

[2] FUST A. et STARCEVIC M. "Palier à segments pour alternateurs à axe vertical de centrales hydro-électriques". Revue Brown Boveri 11-85, pp. 542-545.

[3] FRENE J, NICOLAS D, DEGUEURCE B, BERTHE D et GODET M "La Lubrification Hydrodynamique Paliers et Butées", Collection de la Direction des Etudes et Recherches d'Electricité de France n°72. EYROLLES 1990.

[4] Lomakin